Electromagnétisme PEIP 2 Examen 12 janvier 2022
Choix de 4 Exercices sur 5 / Durée de l'épreuve 2 heures.
Autorisé : Formulaire A4 manuscrit / Calculettes standards
Vous pouvez rendre 5 exercices, on garde la meilleure de 4/5

1. (5pts) **Electrostatique :**

On considère un système de 3 charges $q, q, (-2q)$ respectivement placées aux positions : $P_1 = (a\sqrt{3}, a)$, $P_2 = (a\sqrt{3}, -a)$ et $P_3 = (0, 0)$ (Figure 1.(a)) :

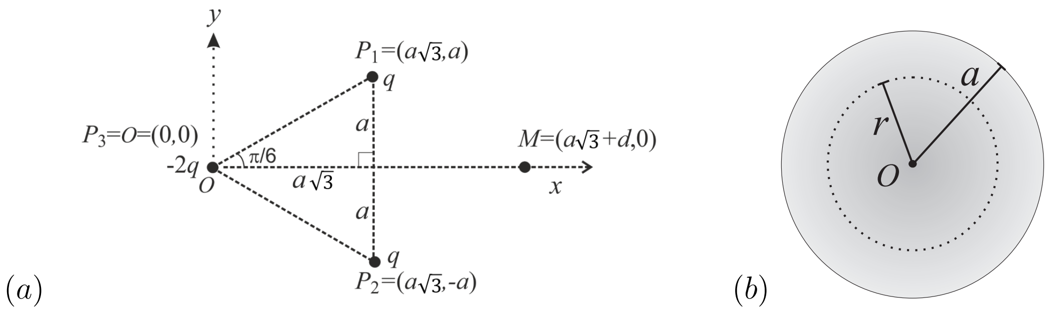

Figure 1: (a) Système de 3 charges : (b) sphère de densité variable.

a) Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_1(M)$ à la position, M, produit uniquement par la charge q à la position $P_1 = (a\sqrt{3}, a)$ (en fonction de a, d et ϵ_0).
b) Trouver la force sur une particule de charge q, $\vec{\boldsymbol{F}}_{\to q}(M)$ à la position, M, produit par l'ensemble des trois charges (en fonction de a, d et ϵ_0).
c) Trouver le moment dipolaire, $\vec{\boldsymbol{p}}$, du système des trois charges (A.N. $a = 1$cm, $q = 50\mu$C).
d) Trouver l'énergie électrique, $\mathscr{E}_e$, du système des trois charges.

2. (5pts) **Electrostatique : Théorème de Gauss** On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique, $V_{r\leq a}(r) = -V_1\frac{r^3}{a^3} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$. (Figure 1.(b))

a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.
b) Quelle est la charge totale, Q, contenue dans la région $r \leq a$? (fonction de a et V_1)
c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$.
d) Si l'on sait qu'il n'y a pas de charges dans la région $r \geq a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r\geq a}(r)$, dans la région $r \geq a$.
e) Exprimer V_0 en fonction de a et Q (On prend $V(\infty) = 0$). (Indice : utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ et l'expression pour V_1 trouvé en (b)).

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\text{Formulaire :} \quad \overrightarrow{\mathbf{grad}} f(r,\theta,\phi) = \vec{\boldsymbol{u}}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{\boldsymbol{u}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\Delta f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

3. (5pts) **Magnétostatique et Théorèmes d'Ampère** Considérons un conducteur rectiligne, supposé infini, parcouru pour un courant d'intensité I orientée le long de l'axe Oy.

   a) Trouver le champ $\vec{B}(\rho, \phi, z)$ produit par ce courant en coordonnées cylindriques en faisant appel au théorème d'Ampère.

   b) Exprimer le champ $\vec{B}(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes à n'importe quelle position $M = (x, y, 0)$ dans le plan xOy.

   c) Trouver le flux $d\Phi$ du champ magnétique à travers une surface $dS = -dxdy\vec{u}_z$ aux positions $x > 0$ et $x < 0$ respectivement. Est-ce que ce résultat dépend de la position y (Justifier votre réponse).

   d) Le fil de courant sur l'axe Oy est cylindrique, de rayon de a. On suppose la densité volumique de courant, $\vec{j}$ (pour $\rho < a$) est homogène. Exprimer $\vec{j}$ (fonction de a et I).

   e) Donner l'expression de $\vec{B}(\rho)$ à l'intérieur du fil en fonction de ρ et I.

4. (5pts) **Force électromotrice :** On garde une ligne de courant sur l'axe Oy comme dans le problème précédent, et on ajoute un circuit rectangulaire portant un courant, i, dans le plan xOy (le courant i est produit par un générateur qui n'est pas illustré dans le schéma en fig.(2)). Le circuit est rectangulaire, de largeur $2a$ en x et de longueur b en y. Le centre du cadre, C, est à la position $(x_0, 0, 0)$ avec x_0 arbitraire ($x_0 \in \{-\infty, \infty\}$). (Les gaines des fils empêchent le court-circuit quand $|x_0| < a$).

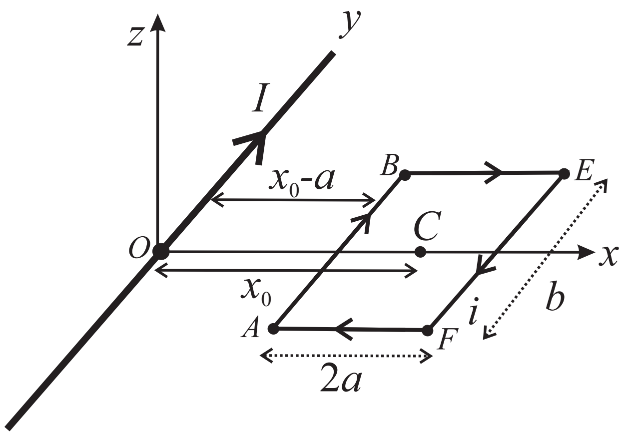

Figure 2: *Cadre rectangulaire à coté d'un fil de courant.*

   a) Trouver la force de Laplace, $\vec{F}_{L\to AB}$ sur le segment AB du cadre et $\vec{F}_{L\to EF}$ sur le segment EF du cadre.

   b) Calculer la somme des deux forces de Laplace sur les segments $\vec{F}_{L\to BE}$ et $\vec{F}_{L\to FA}$. Que vaut la force de Laplace totale, $\vec{F}_{L,\text{tot}}$, sur le circuit.

   c) Donner l'expression du moment dipolaire magnétique, $\vec{m}$, du cadre.

   d) Que vaut est $\vec{F}_{L,\text{tot}}$ quand $x_0 \to 0$? (On se rappel qu'un court circuit n'est pas permis). Expliquer votre résultat avec la règle de flux maximale.

5. (5pts) **Induction :**

   On adopte de nouveau une ligne infinie de courant, I, et le même cadre conducteur que pour le problème précédent (voir fig. (2) du problème précédent. Toutefois, il n'y a plus de générateur, et le courant, i, dans le circuit est produit par induction. Le circuit a une résistance électrique, R.

   a) Trouver l'expression pour le flux magnétique, Φ, à travers le circuit à une position arbitraire x_0 (avec $x_0 \neq |a|$).

   b) On déplace le circuit en fonction du temps $x_0(t)$. Trouver l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, dans le circuit en fonction de I, a, b, $x_0(t)$, et $v(t) = \frac{dx_0(t)}{dt}$.

   c) Donner l'expression du courant induit, $i(t)$, dans le cadre.

   d) Donner l'expression de la puissance dissipée dans la résistance, R, du cadre, $P_J(t)$.